

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V_n(\mathbb{R})$$

$$-1 \leq \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \leq 1$$

$$\cos \alpha := \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$



$$\alpha = \widehat{vw}$$

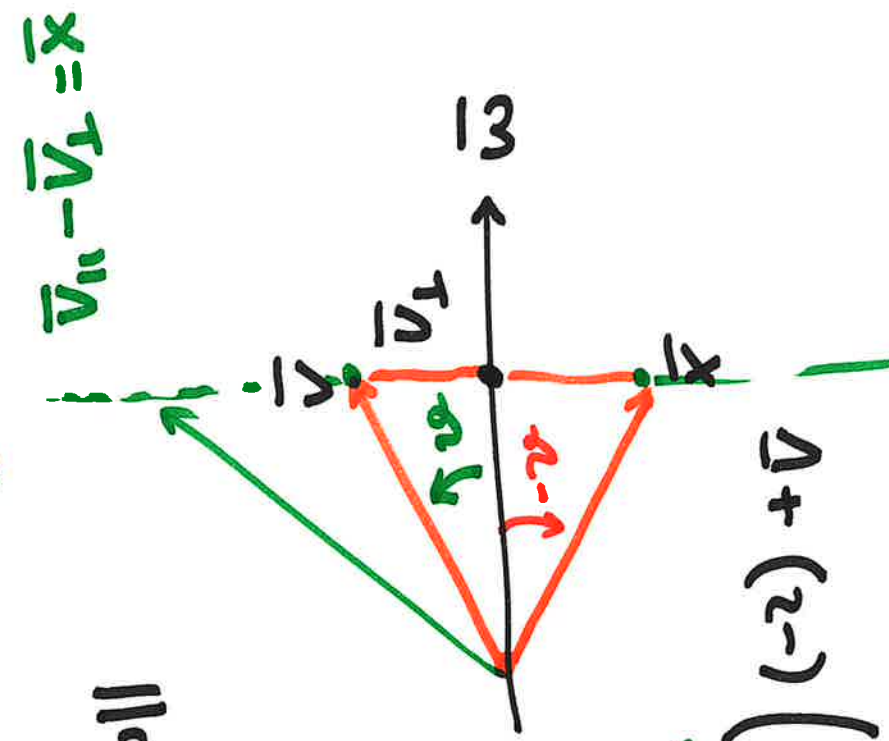
$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{(\alpha \vec{v}) \cdot (\beta \vec{w})}{\|\alpha \vec{v}\| \cdot \|\beta \vec{w}\|} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

- $\cos \widehat{vw}$ non dipende da $\|\vec{v}\|, \|\vec{w}\|$
- se si cambia il verso di entrambi i vettori il cos non cambia.

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$$

$$\bar{V}_i - \bar{V}_T = \bar{x}$$

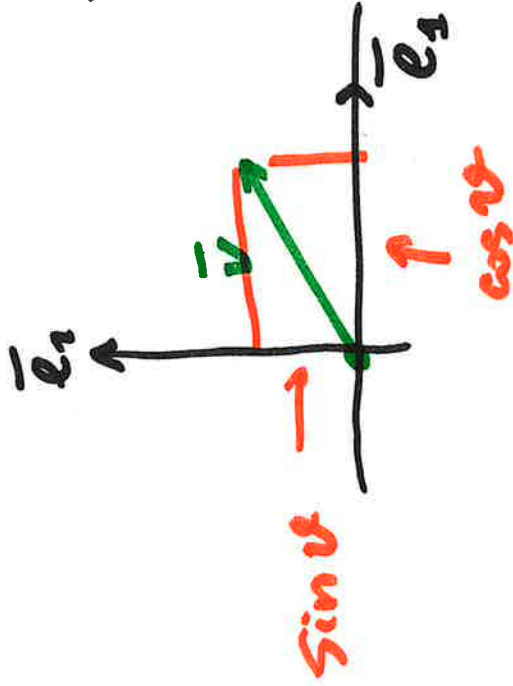




in $\mathbb{R}^2$

$$\sin \vartheta = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}_1\|}$$

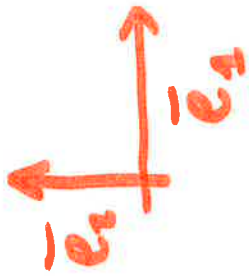
ove $\bar{w}_1$ è un opportuno
vettore $\perp$ a $\bar{w}$.



per scegliere il segno
cioè il verso di $\bar{w}_1$
si considera il det. della
matrice che porta dalla
base canonica $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$
alla base ortogonale

$$\left(\frac{\bar{w}}{\|\bar{w}\|}, \frac{\bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|} \right).$$

vogliamo $\bar{w}_1$ scelto in modo tale che tale segno sia > 0 .
→ il det. della matrice di cambiamento di base fornisce
una orientazione!



+1



$(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ ha la stessa orientazione di $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ e orientazione opposta di $(\bar{w}_2, \bar{w}_1)$



-1

$$\bar{e}_3 = (20)$$

es.

$$\bar{e}_2 = (01)$$

$$\bar{w}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\bar{w}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\det \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 \text{ stessa orient.}$$

$$\bar{w}_2, \bar{w}_1 \Rightarrow \det \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1$$

Gruppi di Matrici

- $GL(n, \mathbb{R})$ matrici invertibili a n righe e n colonne
matrici invertibili a n righe e n colonne $\rightarrow$ DI BASE.
- $O(n, \mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})$ matrici ortogonali $n \times n$
matrici ortogonali $n \times n$ $\rightarrow$ DI BASE
di matrici in $\mathbb{R}$ ORTONORMALI
($A: A^T = -A$).
- $SO(n, \mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$ matrici ortogonali $n \times n$
matrici ortogonali $n \times n$ $\rightarrow$ DI BASE
con $\det = 1$ ORTONORMALI
ORIENTATE.

$SO(2, \mathbb{R}) \rightarrow$ rotazioni attorno a $(0,0)$.

Matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SO(2, \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ a^2 + b^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

~~41~~

$$a = \cos(\varphi)$$

$$b = \cos(\varphi)$$

$$c = \sin(\varphi)$$

$$d = \sin(\varphi)$$

$$\begin{aligned} (\cos \varphi)^2 + b^2 &= 1 \\ b^2 &= \sin(\varphi)^2 \end{aligned}$$

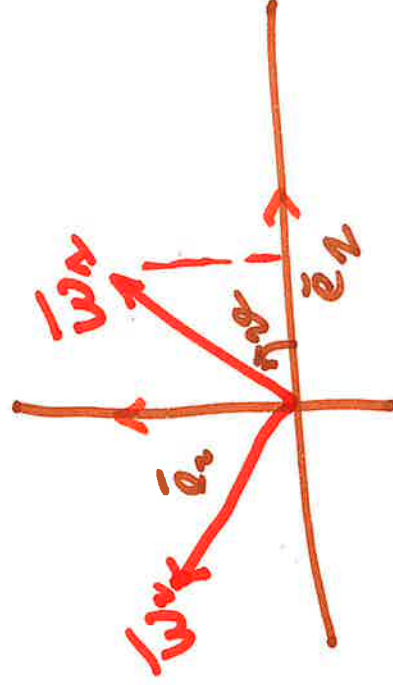
$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \cos(\varphi) = \pm \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi + \frac{\pi}{2} \quad \varphi = \varphi + \frac{3}{2}\pi$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & + \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & - \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & + \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = -\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta = -1$$

$$\det(A_2) = \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1 \Rightarrow \underline{OK}$$



$$\bar{w}_1 = \cos \vartheta \bar{e}_1 + \sin \vartheta \bar{e}_2$$

$$\bar{w}_2 = \sin \vartheta \bar{e}_1 + \cos \vartheta \bar{e}_2.$$

In $V_n(K)$ consideriamo $f: V_n(K) \rightarrow V_n(K)$
endomorfismo.

Applicazione lineare e na B una base di $V_n(K)$.

$\Rightarrow \exists$ A matrice che rappresenta f rispetto a B .

$$A \in M_n(K)$$

se cambiamo base ed P è matrice di
cambiamento di base da B a $B' \Rightarrow$

$\Rightarrow$ In generale la matrice di f

rispetto B' è data da $A' = P^{-1}AP$

cioè A' è una matrice simile ad A .

A ed A' rappresentano la stessa cosa.

In particolare se $f(\bar{x}) = \alpha \bar{x}$ per qualche $\bar{x} \neq 0$

$$\Rightarrow AX = \alpha X \text{ rispetto a } B$$

$$A'X' = \alpha X' \text{ rispetto a } B'.$$

$$\text{N.B.: } X \neq X'$$

ma α è lo stesso!

X, X' dipendono dalla base fissata ma

$\bar{x}$ ed α dipendono solo da f .

Def: Un vettore $\bar{x} \neq 0$ tale che $f(\bar{x}) = \alpha \bar{x}$ è detto autovettore per f di autovalore α .

DOMANDA: ~~Quanta è l'automorfismo (f) (V → V lineare)~~

ma

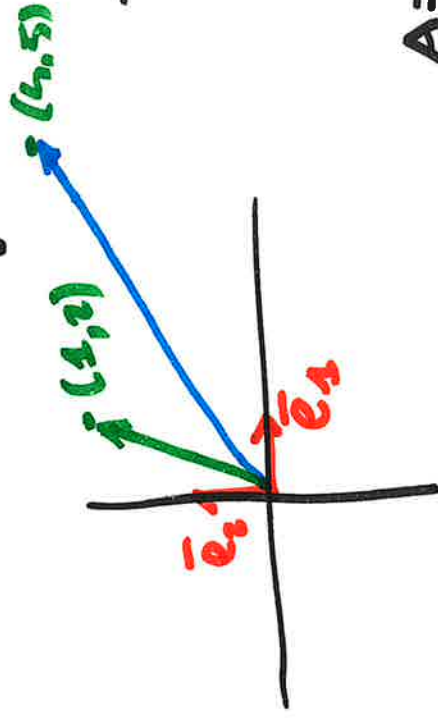
→ Quando 2 matrici rappresentano lo stesso endomorfismo?

→ Quando esse sono simili $A' = PAP^{-1}$

Come facciamo ad accorgercene?

Come si può trovare una base rispetto cui un endomorfismo abbia la rappresentazione più semplice possibile?

Esempio:



In $\mathbb{R}^2$ $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$

$$f(x, y) = (2x + y, 2y + x)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

oss. $f(1, 1) = (3, 3)$
 $f(1, -1) = (1, -1)$

$$(\bar{e}_1', \bar{e}_2') = ((1, 1), (1, -1)) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (1,2)$$

$$\alpha - \beta = 2$$

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\alpha = 2 + \beta$$

$$\alpha + \beta = 2 + 2\beta = 1$$

$$\beta = -\frac{1}{2}$$

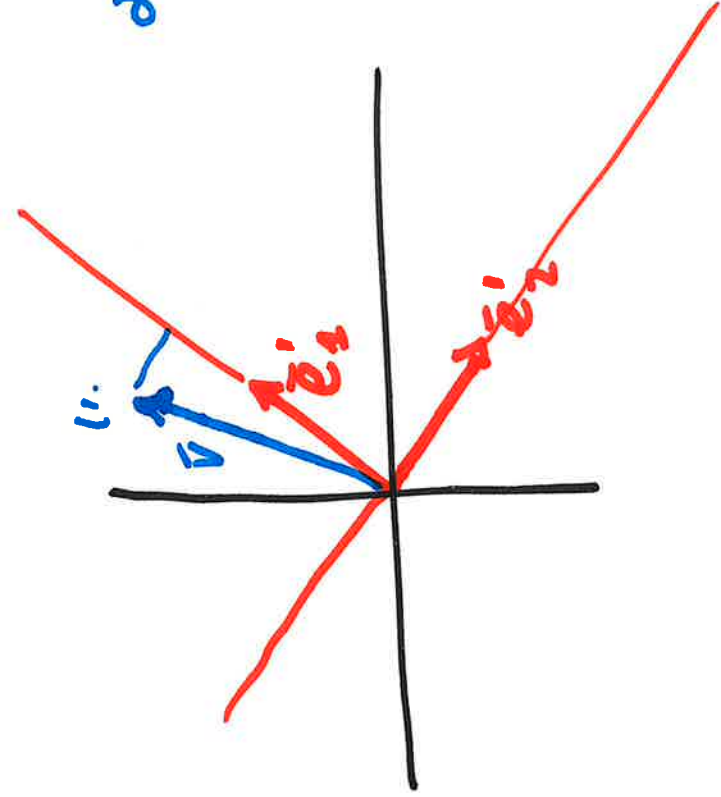
$$\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right]$$

$$f(v) = \left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$



DIAGONALIZZAZIONE.

Def: Sia $A \in M_n(K)$. Si dice autovettore di A
ogni vettore $X \in K^n$ tale che $\exists \alpha \in K$ con
 $X \neq 0$.

$AX = \alpha X$. α è detto autovalore di A (corrispondente
ad X).

oss: Sia B una qualsiasi base $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) \Rightarrow$
se X autovettore di una matrice $A \Rightarrow \bar{X} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$
autovettore per f_A applicazione lineare di matrice A
rapp. in B ed α autovalore di f_A .

X autoreffore per $A \Leftrightarrow X \neq 0$

e $AX = \alpha X$ per qualche $\alpha \in K$

$\Rightarrow AX = \alpha X = 0$ per qualche α

$\Rightarrow (A - \alpha I)X = 0$ con $X \neq 0$ per qualche α .

$X \neq 0$ & $X \in \text{Ker}(A - \alpha I)$

$\Rightarrow X \text{ esiste} \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \alpha I) \neq \{0\}$.

con $A \in M_n(K)$.

$\Leftrightarrow \text{rk}(A - \alpha I) < n$

$\Leftrightarrow \det(A - \alpha I) = 0$

equazione caratteristica di A

Def: Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dicono

- polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

- equazione caratteristica di A

$$p_A(\lambda) = 0$$

- autovalori di A

le radici dell'eq. caratteristica in $\mathbb{K}$

- spettro di A

$$\text{Spec}_{\mathbb{K}}(A) := \{ \lambda_i : \det(A - \lambda_i I) = 0 \}$$

• autovettori di A i vettori

$X \neq 0$ tali che $\exists \lambda \in \text{Spec } A$

con $AX = \lambda X$.

• auto-spazio di A associato all'autovalore $\lambda \in \text{Spec}(A)$

il auto-spazio vettoriale

$$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I).$$

• multiplicità geometrica di $\lambda \in \text{Spec}(A)$

$$\begin{aligned} m_g(\lambda) &:= \dim V_\lambda = \\ &= \dim \text{Ker}(A - \lambda I) = \\ &= n - \text{rk}(A - \lambda I). \end{aligned}$$

• multiplicità algebrica di $\lambda \in \text{Spec}(A)$

il numero di volte che λ compare
come radice di $p_\lambda(x)$.

$$m_\lambda m_\alpha(\lambda).$$

A Gli autovalori sono legati all'applicazione lineare
descritta da A . In particolare matrici simili

hanno

1) lo stesso polinomio caratteristico

2) lo stesso spettro.

3) le stesse molteplicità algebriche per gli autovalori.

4) le stesse molteplicità geometriche per gli autovalori.

N.B.: possiamo definire che $f: V \rightarrow V$ endomorfismo

come autovalori di f i valori α per cui la funzione

$$(f - \alpha I)$$

$$\text{Spec } f = \text{Spec } A$$

$\rightarrow \forall A \text{ che rappresenta } f.$

ove $v =$ funzione identica, non è invertibile.

possiamo anche definire come autospazi di f associati ad un dato autovalore λ

$$V_\lambda^f := \{ \bar{x} \in V : f(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \}.$$

e V_λ^f è uno spazio vettoriale.

$$\begin{aligned} \bar{a}, \bar{b} \in V_\lambda^f: \quad f(\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}) &= \alpha f(\bar{a}) + \beta f(\bar{b}) = \\ &= \alpha \lambda \bar{a} + \beta \lambda \bar{b} = \\ &= \lambda (\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}). \end{aligned}$$

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, $P \in GL(n, \mathbb{R})$

$$B = PAP^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(B - \lambda I) = \det(PAP^{-1} - \lambda PP^{-1}) =$$

$$= \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) =$$

$$= \det(P) \det(A - \lambda I) \det(P^{-1}) =$$

$$= \det(A - \lambda I).$$

oss: matrici simili hanno anche lo stesso determinante!

poiché $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$ abbiamo $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(B)$

e pure le mult. algebriche coincidono.

$$rk(A - \lambda I) = rk(B - \lambda I) \quad \forall \lambda$$

$$\text{rk}(B - \lambda I) = \text{rk}(P A P^{-1} - \lambda P I P^{-1}) =$$

$$= \text{rk}[P(A - \lambda I)P^{-1}]$$

Indichiamo con f la funzione lineare
 con matrice $(A - \lambda I)$ e con g la funzione
 con matrice P .

$\text{rk } P(A - \lambda I)P^{-1}$ è la ~~stessa~~ matrice della funzione

$$g \circ f \circ g^{-1}$$

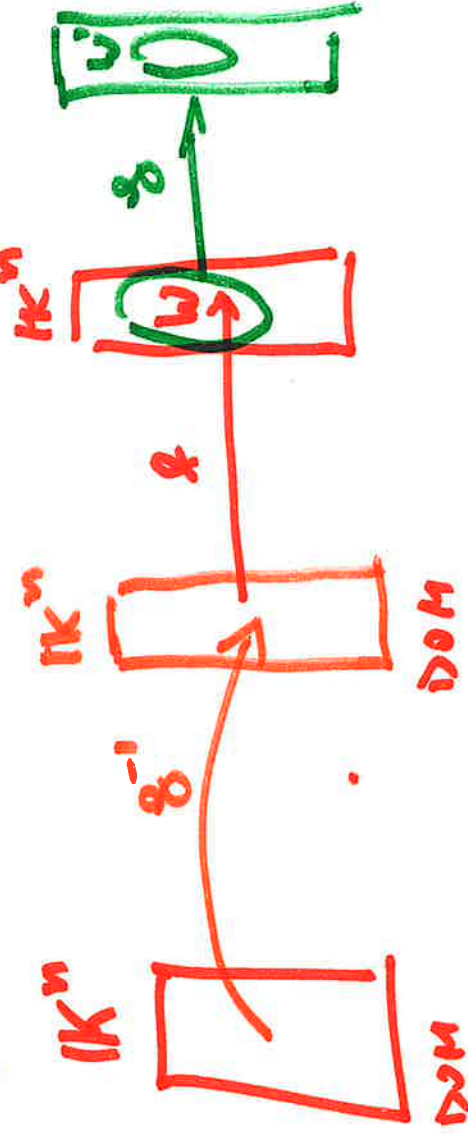
$$\text{ma } \text{rk}(P(A - \lambda I)P^{-1}) = \dim \text{Im}(g \circ f \circ g^{-1}) = \\ = \dim \text{Im}(g \circ f) \quad \text{perché } g^{-1} \text{ è invertibile}$$

e quindi preserva la dim. dell'immagine

$$\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im}(g \circ f \circ g^{-1})$$

$\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im} f$ in generale

g invertibile e $\dim \operatorname{Im} g \circ f = \dim \operatorname{Im} f$.



$$m_f(X) = \dim V_f^f$$

autospazio di f di autovettore λ .

$\Rightarrow$ non può dipendere dalle basi fissate.

In fatti:

$$\bar{x} \in V_f^f \Leftrightarrow V \text{ base } B \text{ fissa ed}$$

A matrice di f rispetto

a B , X comp. di $\bar{x}$ rispetto

$$AX = \lambda X$$

$$\Leftrightarrow X \in V_f.$$

(V_f dipende da B

ma non la sua dim.).